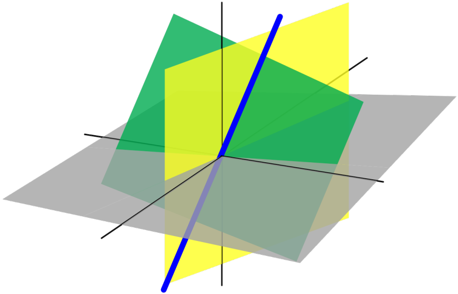
Algèbre Linéaire

Cours du 17 septembre

Jérôme Scherer



4.1.1 Rappels sur les espaces vectoriels

Un espace vectoriel est un ensemble V non vide dont les éléments sont appelés vecteurs. Il est muni de deux opérations.

1. L'addition (ou somme) $+ \colon V \times V \to V$ qui associe à deux vecteurs (u, v) leur somme $u + v$.
2. L'action $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V$ qui associe à un nombre α et un vecteur u leur produit αu.

Ces opérations vérifient huit règles qui expliquent en gros qu'on peut calculer comme on a l'habitude de le faire dans $\mathbb{R}^n$.

4.1.2 Propriétés

On note ici $0_{\mathbb{R}}$ pour le nombre 0 et 0_V pour le vecteur nul. Bientôt le contexte permettant de distinguer nombres et vecteurs, on oubliera ces indices.

0 est absorbant

On a $0_{\mathbb{R}} \cdot u = 0_V$ pour tout $u \in V$.

Preuve. On écrit

$0_{\mathbb{R}}$ est le zéro de + dans $\mathbb{R}$

distributivité

$$0_{\mathbb{R}} \cdot u = (0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}) \cdot u = 0_{\mathbb{R}} \cdot u + 0_{\mathbb{R}} \cdot u$$

par distributivité. On ajoute de part et d'autre l'opposé de $0_{\mathbb{R}} \cdot u$ si bien que

$$0_V = 0_{\mathbb{R}} \cdot u$$

après avoir utilisé l'associativité de l'addition. $\square$

Remarque

L'opposé

On a $(-1) \cdot u = -u$ pour tout $u \in V$.

Il suffit de vérifier que $u + (-1) \cdot u = 0_V$...

D'autres corps de nombres

On peut définir la notion d'espace vectoriel sur d'autres corps.

1. sur les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ ou sur les nombres complexes $\mathbb{C}$;
2. sur le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 = \{0; 1\}$ avec la règle d'addition "binaire" $1 + 1 = 0$.

On ne peut pas le faire sur les entiers relatifs $\mathbb{Z}$! En général on ne peut pas réduire les matrices à coefficients entiers sans passer soudainement dans $\mathbb{Q}$.

1.3.4 et 4.1.4 Combinaisons linéaires

somme de multiples réels de vecteurs

Définition

Soient $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Un vecteur

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p}$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_i}$ pour $1 \leq i \leq p$.

Définition

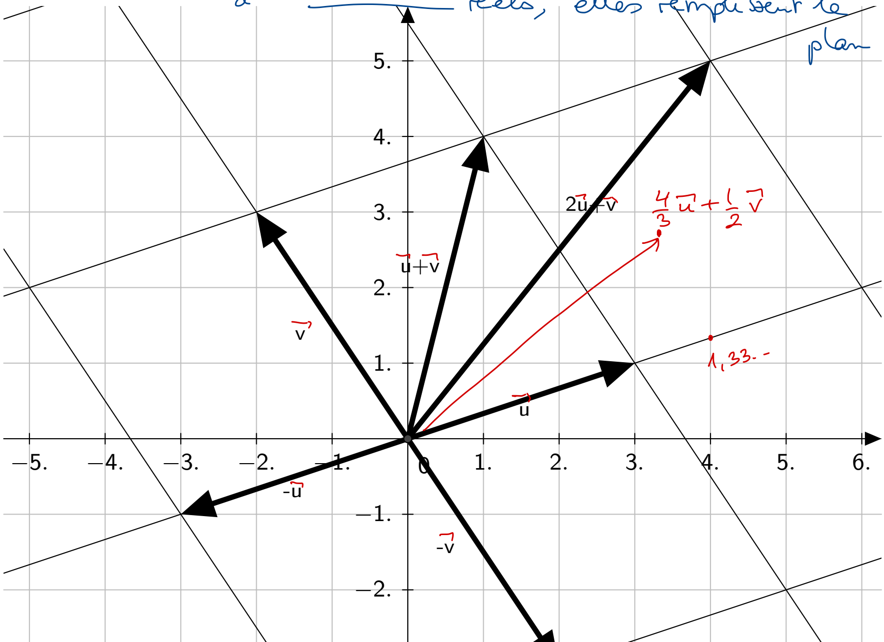
Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs d'un espace vectoriel V. Un vecteur

$$u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs v_i pour $1 \leq i \leq p$.

1.3.4 Exemples

à coefficients entiers, les combinaisons linéaires forment un réseau.
à réels, elles remplissent le plan



Existe-t-il une combinaison linéaire

…des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ qui donne $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$?

on cherche $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tq

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{action dans } \mathbb{R}^2]{\text{somme}} \begin{pmatrix}x_1+x_2\\2x_1\\3x_1-x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 = 1\\ 2x_1 = 1\\ 3x_1 - x_2 = 1\end{cases} \leadsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[L_3-3L_1]{L_2-L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & -1 & -1/2\end{array}\right) \xrightarrow{L_3+L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right). \text{ Ainsi } S = \left\{\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\}.$$

Suite

Donc $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

1.3.5 Résolution de système

- On se donne des vecteurs $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ et $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^n$.
- On construit la matrice augmentée $A = (\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n} \mid \overrightarrow{b})$.

Remarque

L'équation vectorielle $x_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{b}$ a les mêmes solutions que le système correspondant à la matrice A.

Point de vue vectoriel

Le vecteur $\overrightarrow{b}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ si et seulement si le système représenté par la matrice A est compatible.

4.1.5 Faire du neuf avec du vieux

V : espace vectoriel

Définition

Un sous-espace W de V est un sous-ensemble de V contenant le vecteur nul tel que

(a) Stabilité de la somme : si $u, v \in W$, alors $u + v \in W$;

(b) Stabilité de l'action : si $u \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u \in W$.

Si W est un sous-espace de V, la somme dans W reste associative, commutative, etc., l'action reste distributive par rapport à l'addition, etc., puisque les calculs dans W sont identiques dans V.

Proposition

Un sous-espace vectoriel est toujours un espace vectoriel.

4.1.5 Sous-espaces vectoriels

Le plus petit sous-espace de V. C'est le sous-espace nul $\{0_V\}$.

Le plus grand sous-espace de V. C'est l'espace V lui-même.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$ une droite passant par l'origine est de la forme $W = \{\lambda \overrightarrow{w} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ pour un vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul de $\mathbb{R}^3$. C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ forme un sous-espace.

PREUVES

① $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{w} \in W$.

Si $\vec{u} = \lambda \vec{w}$, $\vec{v} = \mu \vec{w}$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} = \lambda \vec{w} + \mu \vec{w} \overset{\text{distr.}}{=} (\lambda + \mu) \cdot \vec{w} \in W.$$

idem pour l'action.

② • La fonction nulle $0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, elle est continue.

• Si f, g sont continues, alors $f + g$ aussi

• Si f est continue, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

③ $D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ n'est pas un sous-espace vectoriel car $\vec{0} \notin D$

4.1.6 Sous-espaces et combinaisons linéaires

Définition

Soient $v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de V. Alors $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, pour $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Théorème

$\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$ est un sous-espace de V.

Remarque. Le vecteur nul 0 appartient à $\mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$. Il suffit en effet de choisir tous les coefficients $\lambda_i = 0$.

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$$

Convention. $\mathrm{Vect}\{\emptyset\} = \{0\}$. Si $k = 0$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$

PREUVE. Reste à voir la stabilité de $+$ et de l'action.

- Soient $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k$ deux vecteurs de $W = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Alors

$$(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k) \underset{\text{comm. de }+}{\overset{\text{assoc.}}{=}}$$

$$\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_k v_k \underset{\text{de l'action}}{\overset{\text{distr.}}{=}}$$

$$(\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k) v_k \in W$$ car c'est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_k$.

- idem pour action. $\square$

4.1.6 et 1.3.6 Terminologie

Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V. Soit $W = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Alors

- W est engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$;
- les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont des générateurs de W ;
- l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est une partie génératrice de W.

On préfère en général trouver des petites parties génératrices d'un sous-espace donné. Cette question nous occupera par la suite !

4.1.7 et 1.3.7 Exemples

1. $\mathrm{Vect}\{t^2, t\}$ est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$.

$\mathrm{Vect}\{t^2, t\} = \{at^2 + bt \mid a, b \in \mathbb{R}\}$: tous les polynômes de $\mathbb{P}_2$ sans coeff. constant.

p. ex $\frac{3}{2}t^2 - \sqrt{2}\,t \in \mathrm{Vect}\{t^2, t\}$.

2. $\mathrm{Vect}\{\sin x, \cos x\}$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\{$ "$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ forme un plan de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Dans $\mathbb{R}^4$ étudions l'ensemble W des vecteurs $\begin{pmatrix} a - 2b + c \\ -a - c \\ b + 2a + 2c \\ -b \end{pmatrix}$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Meilleure description. Par définition de la somme dans $\mathbb{R}^4$ il s'agit des vecteurs de la forme

$$\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b \\ 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{action}}{=} a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

$$= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

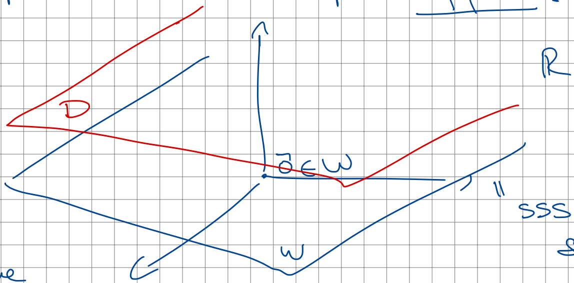
Comme les 1^{er} et 3^e vecteurs sont les mêmes on peut réduire le nombre de générateurs.

W est un <u>plan</u> de $\mathbb{R}^4$.

Suite. ⚠ $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

n'est pas un sous-espace vectoriel car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin D$

On appelle D un sous-espace affine.



"sss : si et seulement si"

Remarque

$D = \{ u + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}$ est un ss-espace de V sss $u \in \mathrm{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$.

1.4.1 Produit matriciel

Soit A une matrice $m \times n$. Les colonnes de A sont des vecteurs

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \overrightarrow{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \underline{\underline{\in \mathbb{R}^n}}$$

Définition

La multiplication matricielle est définie par la formule

$$A \cdot \overrightarrow{x} = (\overrightarrow{a_1} \ldots \overrightarrow{a_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + x_n \cdot \overrightarrow{a_n}$$

Ainsi le i-ème coefficient de $A \cdot \overrightarrow{x}$ vaut $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$.

On multiplie "ligne par colonne".

EXEMPLE.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution du système d'équations donné sous forme matricielle par $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \quad -.$$

1.4.2 Problèmes équivalents

Théorème

Les problèmes suivants sont tous équivalents. Résoudre :

1. l'équation matricielle $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$
2. l'équation vectorielle $x_1 \overrightarrow{a_1} + \cdots + x_n \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{b}$
3. le système correspondant à $(\overrightarrow{a_1} \ldots \overrightarrow{a_n} | \overrightarrow{b})$

Proposition

L'équation matricielle $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une solution si et seulement si $\overrightarrow{b}$ est combinaison linéaire des colonnes de A.

Corollaire

L'équation matricielle $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ admet toujours une solution: $\overline{x} = \overline{0}$.

1.4.2 Exemple

Nous voulons savoir pour quelles valeurs des paramètres b_1, b_2, b_3 le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} x & +y & +z & = b_1 \\ -x & -y & +z & = b_2 \\ x & +y & +3z & = b_3 \end{cases}$$

En d'autres termes nous voulons savoir quand le système suivant est compatible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Résolution. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ -1 & -1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 3 & b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$